Le plus important n'est pas le but lui-même, c'est de se battre pour l'atteindre.

مسألة رقم 1 :

I) نعتبر الدائرة المثلثية (C) و معلما $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ متعامدا ممنظما مرتبطا بها. M نقطة تتغير على القوس (IJ) و M' مماثلتها بالنسبة لمحور الأفاصيل. و H المسقط العمودي للنقطة M على محور الأفاصيل Ω م I ب O .

1) نضع $OH = x$, بين أن مساحة المثلث $\Omega MM'$ هي:
$$S(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2}$$

2) حدد و ضع النقطة M الذي تكون من أجله مساحة المثلث $\Omega MM'$ قصوية و حدد طبيعة المثلث $\Omega MM'$ في هذه الحالة .

II) الدالة f :
$$\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2} & ,0\le x\le 1 \\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-x} & ,x\rangle 1\end{cases}$$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_1=1$.

ب- أدرس ق. شf عند $x_1=1^+$ و عند $x_1=1^-$.

ج- أدرس قابلية اشتقاق عند $x_0=0^+$.

2) أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ثم أول النتيجة .

ب- أثبت أن: $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $1\langle\alpha\langle\frac{4}{5}$.

ج- أنشىء المنحنى (C_f) . $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

مسألة رقم 2 :

f معرفة على IR ب :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x} & ;x\langle 0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} & ;x\rangle 0\end{cases}$$

I-1) أ- أثبت أن الدالة f متصلة يسار $x_0=0$.

ب- أدرس اتصال الدالة عند النقطة $x_0=0$ على اليمين .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f يسار $x_0=0$.

II-1) أ- بين أن: $(\forall x\in IR^{*-}):(2x^2-1)e^{x^2}+1\rangle 0$

(يمكن دراسة تغيرات الدالة φ المعرفة على IR^{*-} بمايلي: $\varphi(x)=(2x^2-1)e^{x^2}+1$)

ب- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty,0[$.

2) أ- بين أن: $(\forall x\in IR^{*-}):\ \frac{x}{x+1}\langle\ln(1+x)$

(يمكن اعتبار الدالة $t\to\ln(1+t)$ و تطبيق م.ت.م)

ب- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

3) أ- اعط جدول تغيرات الدالةf .

ب- ادرس الفروع اللآنهائية للمنحنى (C) .

ج- أنشىء المنحنى (C) في م. م. م $(O,\vec{i},\vec{j})$ . .

4) ليكن λ عددا حقيقيا من المجال $]1,+\infty[$.

أ- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للجزء المستوي المحصوربالمنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\lambda$ و $x=1$.

ب- احسب $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$

مسألة رقم 3:

A-1) تحقق من أن لكل x من $[0,+\infty[$:
$$\int_0^x\frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x)$$

ثم استنتج أن: $x-\ln(1+x)\ge 0$ لكل $x\ge 0$.

2) f معرفة على $[0,+\infty[$ ب: $f(x)=\sqrt{x-\ln(1+x)}$

أ حسب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا.

3) نضع لكل x من $[0,+\infty[$: $u(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$

أ- بين أن: $0\le u'(x)\le x^2$

ثم استنتج أن $0\le u(x)\le\frac{x^3}{3}$ على المجال $[0,+\infty[$.

ب- استنتج أن $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\le x-\ln(1+x)\le\frac{x^2}{2}$

لكل x من $[0,+\infty[$.ثم احسب . $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

ج- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر.

4) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ و اعط جدول تغيرات الدالة f.ثم أنشىء (C_f) في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$.

5) أ- أحسب باستعمال الم بالأجزاء $I=\int_0^{\frac{3}{2}}x\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}dx$.

ب- بين أن : $\frac{3\sqrt{2}}{10}cm^2\le A(\Delta)\le\frac{9\sqrt{2}}{16}cm^2$ (3-ب)

حيث $A(\Delta)$ هي مساحة الحيزمن المستوي المحصور بين (C_f) و $A(O,\vec{i})$ و المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{3}{2}$.

B- g معرفة على $[0,+\infty[$ ب:
$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ ;x\rangle 0 \\ g(0)=0\end{cases}$$
(حساب $\int_0^x f(t)dt$ غير مطلوب.)

1)أ- بين أن: $f(x)-g(x)\ge 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.م.مت

ب- استنتج أن g متصلة يمين 0 و أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

2) تحقق من أن $g'(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

و آستنتج رتابة g.

مسألة رقم 4 :

I) g_m معرفة على $[1;+\infty[$ بمايلي : $g_m(x)=m\sqrt[3]{x-1}-1$, m بارامتر حقيقي غير منعدم.

1) أدرس حسب قيمm تغيرات الدالة g_m .

2) حل فيIR حسب قيم m المعادلة : $g_m(x)=1$.

II) نفترض فيما تبقى من الأسئلة أن: $m\geq 2$.

لتكن f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقيx بحيث:

$$\begin{cases} f_m(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{g_m(x)}\right) \ , x\geq 1+\left(\dfrac{2}{m}\right)^3 \\ f_m(x)=\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2-x} \ ; x<1+\left(\dfrac{2}{m}\right)^3 \end{cases}$$

1)أ- تحقق أن الدالة f_m معرفة على IR .

ب- أدرس حسب قيم m اتصال الدالة f_m في :

$$x_0=1+\left(\frac{2}{m}\right)^3$$

2) حدد منحى تغيرات الدالة f_m .

3) نرمز ب (C_2) لمنحنى الدالة f_2 في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ- أ حسب $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{f_2(x)-\frac{\pi}{2}}{x-2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{f_2(x)-\frac{\pi}{2}}{x-2}$.

و أول النتيجة مبيانيا.

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f_2 .

ج- حدد الفرعين اللانهائين ل (C_2) و أنشىء (C_2) .

مسألة رقم 5:

I) f على المجال $[0,1]$ دالة المعرفة ب :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin}\left[\cos^2(\pi x)\right]$$

1) بين أن: $f(x)=f(1-x)$ لكل x من $[0,1]$.

2) بين أنه لكل من $]0,1[$: $f'(x)=\dfrac{-2\cos(\pi x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi x)}}$

ثم ضع جدول تغيرات الدالة .

3) بين أنه لكل x من $\left]\frac{2}{3},1\right[$ يوجد c من $]x,1[$ بحيث:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-2\cos(\pi c)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi c)}}$$

4) بين من خلال 3) أن $\lim\limits_{1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{2}$.

و أن $\lim\limits_{0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\sqrt{2}$.

5) أنشىء C .

II) لتكن (E) المعادلة $f(x)=x$.

1) بين أن(E) تقبل حلا و حيدا αفي $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ثم حدد α .

2) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة ب:

$$U_0=\frac{1}{4} \text{ و } U_{n+1}=fof(u_n)$$

أ- بين أن: $\alpha\leq U_n\leq\dfrac{1}{2}$

ب- أدرس رتابة (U_n) .

ج- حل المعادلة : $fof(x)=x$ في المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

د- استنتج أن (U_n) متقاربة محددا $\lim u_n$.

مسألة رقم 6:

I) g معرفة على $I=[1,2[\cup]2,+\infty[$

بمايلي: $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x-2)}-\ln|x(x-2)|$

1) أ درس تغيرات الدالة g (النهايات,الدالة المشتقة والتغيرات).

2) أ- بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]2,+\infty[$

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على I .

II) f معرفة على $D=IR-\{0,2\}$ بمايلي :

$f(x)=\dfrac{\ln|x(x-2)|}{(x-1)^2}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=-1$.

1) بين أن المستقيم(Δ): $x=1$ محور تماثل للمنحنى(C) .

2) أ- أ حسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ب- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة $x_0=1$.

3) أ- تحقق من أن:

$$\left(\forall x\in\left]1,\frac{3}{2}\right[\right):\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln\left|1-(x-1)^2\right|+(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

ب- بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة $x_0=1$

(يمكن استعمال النتيجة التالية: $-\dfrac{t^2}{2}-t^3\leq\ln(1-t)+t\leq-\dfrac{t^2}{2}$,

لكل من $\left]0,\frac{1}{4}\right[$) .

4) أ- بين أن: $(\forall x\in I-\{1\}):f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}.g(x)$.

ب- تحقق من أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f

5) أ- حدد نقطتي تقاطع المنحنى (C)و محور الأفاصيل.

ب- أنشىء المنحنى (C) في م.م.م$(O,\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة: $2cm$. ،نأخذ $\alpha=3,14$ و $f(\alpha)=0,28$.

ج- احسب التكامل التالي: $J=\displaystyle\int_3^4\frac{2}{x(x-2)}dx$

(لاحظ أن: $\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}$)

د- باستعمال مكاملة بالأجزاء .احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين المنحنى(C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما: $x=3$ و $x=4$.

الأستاذ : علي الشريف
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية
cherifalix@yahoo.fr

مسألة رقم 7:

لتكن f دالة معرفة و متصلة على $]0,+\infty[$.

لكل x من $]0,+\infty[$ نعتبر الدالة $F : x \to \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

1) بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و أن : $$F'(x)=\frac{f(3x)-f(x)}{x}$$

2) حدد F في كل الحالتين التاليتين:

a - $f : t \to \frac{1}{t}$ b - $f : t \to 1$

3) نعتبر الدالة $G(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt$: $x \in]0,+\infty[$.

أ- حدد إشارة $G\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و إشارة $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ب- بين أن $\left|\frac{\cos t}{t}\right| \le \frac{1}{t}$ $\forall t \in IR_+^*$.

و أن $|G(x)| \le \ln 3$ $\forall x \in IR_+^*$.

ج- بين أن $\forall x \in IR_+^* \quad \ln 3 - G(x) = 2\int_x^{3x}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}\,dt$

و أن $0 \le \ln 3 - G(x) \le 2x^2$ $\forall x \in IR_+^*$.

إستنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} G(x)$.

4) نعتبر: $$\forall x \in IR_+^* \quad : \quad \varphi(x)=\frac{\ln 3 - G(x)}{x}$$

أ درس $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \varphi(x)$.

5) نعتبر الدالة H بحيث $H(x)=G(x)$ $\forall x \in IR_+^*$.

بين أن H متصلة على $[0,+\infty[$. و $H(0)=\ln(3)$

6)بين $\forall x \in IR_+^* : \left|H(x)-\frac{\sin(3)-3\sin(x)}{3x}\right| \le \frac{2}{3x}$ آ

ستنتج أن $H(x) \le \frac{2}{3}$ $\forall x \in IR_+^*$ و حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.

مسألة رقم 8 :

I) نعتبر على المجال $]-\infty,1]$ الدالة المعرفة ب :

$$g(1)=1-\frac{\pi}{2}$$

$$g(x)=\frac{x}{x^2+(x-1)^2}+\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) \ : x\langle 1$$

1)بين أن g متصلة على يسار 1 ثم أحسب $\lim\limits_{-\infty} g(x)$.

2) بين أن لكل x من $]-\infty,1[$ $$g'(x)=\frac{2x(1-2x)}{\left[x^2+(1-x)^2\right]^2}$$

ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

3) بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]\frac{1}{2},1\right[$

II) نعتبر على المجال $]-\infty,1]$ الدالة f المعرفة ب :

$$f(0)=-1 \ , \quad f(1)=-\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right), x \ne 1, x \ne 0$$

1) بين أن f متصلة على يسار 1 و متصلة في 0.

2) بين أنه لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$: $$f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$$

3) أ- ليكن x من $[\alpha,1]$: بين أن : يوجد c من $]x,1[$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{g(c)}{c^2}$$

ب- استنتج أن:

$$\forall x \in]\alpha,1[: -g(x)\langle \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\langle \frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

ج- استنتج قابلية اشتقاقf على يسار النقطة $x_0=1$.

4) أ- بين أن: $$\forall t \in IR_-^* : t\langle arctg(t)\langle \frac{t}{t^2+1}$$

ب-بين أن $\forall x \in]0,1[: \frac{1}{x-1}\langle \frac{f(x)+1}{x}\langle \frac{2x-1}{x^2+(x-1)^2}$

ج- استنتج أن $\lim\limits_{0+}\frac{f(x)+1}{x}=-1$ (نقبل أن $f_g'(0)=-1$)

د- ضع جدول تغيرات الدالة f .احسب $\lim\limits_{-\infty} f(x)$.

ه- أنشئ C_f ($\|\vec i\|=\|\vec j\|=2cm$, $\pi=3$, $f(\alpha)\approx-\frac{5}{3}$, $\alpha\approx\frac{3}{4}$)

مسألة رقم 9:☺

f معرفة علىIR ب :

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & ,x\langle 0 \\ f(x)=x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & ,x\rangle 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) بين أن f متصلة و قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0=0$.

3) $g(x)=2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$ حيث $x \in]0,+\infty[$

أدرس تغيرات g على $]0,+\infty[$ و استنتج إشارة $g(x)$.

4) اعط جدول تغيرات الدالة f.

5) أ- بين أن $y=x+1$ مقارب ل (C) بجوار $-\infty$.

ب- نقبل أن $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ أنشىء (C).

الأستاذ : علي الشريف
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية
cherifalix@yahoo.fr

مسألة رقم 10:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقيx المعرفة بمايلي:

$$f(x)=Arc\tan\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f: D_f و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة على اليمين في $x_0=-1$, ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4) أنشىء المنحنى (ζ_f) في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) نضع: $g(x)=\frac{1}{9}\left[\tan(f(x))+x\right]^3-\frac{2}{3}Arc\tan(x)$

أ- حدد حيز تعريف الدالة g: D_g ثم بين أن لكلx من D_g .

$$g(x)=\frac{1}{3}.\left(\frac{x^3+1}{3}-2.Arc\tan(x)\right)$$

ب- بين أن: $(\exists!\alpha\in[-1;1]):\ g(\alpha)=0$.

ج- بين أن : $(\forall x\in]-1;1[):|g'(x)|\leq k$

حيث $(k\in[0;1[)$ يتم تحديده .

6) (u_n)متتالية معرفة ب: $\begin{cases}-1\leq u_0\leq 1\\ u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$

أ- بين أن: $(\forall n\in IN):|u_n|\leq 1$

ب- بين أ ن : $(\forall n\in IN):|u_{n+1}-\alpha|\leq k.|u_n-\alpha|$

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

د- حدد قيمة مقربة ل α بالدقة 10^{-1}و بحيث $u_0=0$.

مسألة رقم 11:

n من IN^* نضع $f_n(x)=\frac{x^ne^{-x}}{n!}$ من أجل $x\in[0,+\infty[$.

A-1) أدرس تغيرات الدالة f_n .

2) ليكن (C_n) منحنى f_n .أ درس وضع (C_n) بالنسبة ل (C_{n-1}) حيث, $n\geq 2$.

ثم بين أن : $(n,f_n(n))\in(C_{n-1})$

3) أنشىء (C_1) و (C_2) و (C_3) مع تحديد المماسات لهذه المنحنيات عند O . $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=2cm$ و$\|\vec{j}\|=10cm)$.

B- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ بحيث $u_n=f_n(n)$.

a(1-بين أن (u_n) تناقصية.

b- هل (u_n) متقاربة؟

a(2- تغيرات : $g(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{4}$ على $[0,1]$

استنتج أن: $\forall t\in[0,1]:\ \ln(1+t)\leq t-\frac{t^2}{4}$

b- استنتج أن: $\forall n\in IN^*:\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

a(3- بين أن : $\forall n\in IN^*:\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq e^{-\frac{1}{4n}}$

b- استنتج أن : $u_n\leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+...+\frac{1}{2}+1\right)}$

a(4- بين أن:

$$\forall n\in IN^*,n\geq 2,\int_1^n\frac{dt}{t}\leq 1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}$$

b- استنتج أن: $\forall n\in IN^*,n\geq 2,u_n\leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$

C- نضع : $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^ne^{-t}}{n!}$, حيث $n\in IN^*$ و $\forall n\in IN^*$

1) احسب $I_1(a)$.

2) بين أن : $\forall n\in IN^*\ ,\ \forall t\rangle 0\ \ 0\leq f_n(t)\leq\frac{t^n}{n!}$.

استنتج تأطيرا للعدد $I_n(a)$.

a(3-بين أن: $\frac{1}{n!}\langle\left(\frac{e}{n}\right)^n$ $\forall n\in IN^*$.

b- استنتج تأطيرا جديدا للعدد $I_n(a)$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(a)$.

a(4- حدد علاقة بين $I_n(a)$ و $I_{n-1}(a)$, حيث $n\geq 2$,

b- استنتج أن :

$$\forall n\geq 2:I_n(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+....+\frac{a^n}{n!}\right)$$

هل هذه المتساوية تبقى صالحة إذاكان $n=1$ ؟

5) بين أن :

$$\forall a\in IR_+\ \ e^a=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+....\frac{a^n}{n!}\right)$$

مسألة رقم 12:

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقيx المعرفة كالتالي:

$$f_n(x)=Arc\cos\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$$

حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

I-1) أ- بين أن f_n معرفة على IR .

ب- أدرس زوجية f_n ثم أحسب$f_n(x)$ $\lim\limits_{X\to+\infty}$.

أ- بين أن لكل x من IR : $f_n(x)=\pi-2Arc\tan|x^n|$

ب- بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على$]0,+\infty[$

و أن: $f'_n(x)=\frac{-2n\,x^{n-1}}{x^{2n}+1}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ج- ادرس قابلية اشتقاق f_n على اليمين في الصفر (هناك حالتان: $n=1$و $n\neq 1$).

د- اعط جدول تغيرات f_n على يمين0 في كلتا الحالتين: $n=1$ و $n\neq 1$.

3) ليكن g_n قصور الدالة f_n على IR^+ .بين أن g_n تقابل من IR^+ نحو مجال I يجب تحديده ثم حدد $g_n^{-1}(x)$ بدلالة $\cot an\frac{x}{2}$.

II- نأخذ في كل مايلي $n=1$.

1) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,2[$ بحيث $f_1(\alpha)=\alpha$.

2) أنشىء في نفس المعلم المتعامد الممنظم منحنى f_1 على IR و منحنى g_1^{-1} .

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f_1(u_n) \end{cases}$$

و نضع $v_n=u_{2n}$, $w_n=u_{2n+1}$.

أ- بين أن: $0\le u_n\le\pi$ لكل n من IN .

ب- بين أن V_n تزايدية و أن w_n تناقصية.

ج- استنتج أن V_n و w_n متقاربتان .

✍ مسألة رقم 13:

نعتبر الدالة العددية f التي تحقق الخاصية التالية :

(E) : f متصلة و قابلة للإشتقاق مرتين على IR_+^* .

و $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ لكل x من IR_+^* .

أ- بين أن : $x^2f''(x)+f(x)=0$ لكل x من IR_+^* .

ب- نعتبر g المعرفة على IR بمايلي : $g(x)=f(e^x)$

بين أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية :

ج- أوجد مجموعة حلول المعادلة(F) .

2) أوجد مجموعة الدوال العددية المعرفة على IR_+^* و التي تحقق الخاصية (E).

✍ مسألة رقم 14 :

f معرفة على IR : $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}}$

وليكن C منحنى في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=3\,cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) ادرس تغيرات الدالة f.

3) أ- ادرس الوضع النسبي ل C و Δ ذي المعادلة $y=1$

ب- بين أنه لكل x من IR :

$$f''(x)=\frac{e^x}{\left(e^{2x}-2e^x+2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(e^x-1\right)\left[\left(e^x-1\right)^2-5\right]$$

ج- ادرس تقعر المنحنى C وحدد نقط انعطافه.

د- ارسم المنحنى C (نأخذ $\ln 2\approx 0{,}7$ و $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ و $\ln\left(1+\sqrt{5}\right)\approx 1{,}2$ و $\sqrt{7}\approx 2{,}6$)

4) لتكن: $G(x)=\ln\left(e^x-1+\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}\right)$

أ- تحقق أنG دالة أصلية للدالة f على IR.

ب- احسب مساحة السطح المستوي المحدودب C و المستقيمات : $x=0$ و $x=\ln 2$ و $y=0$.

5) احسب ب cm^3 حجم الجسم المولد بالدوران حول محور الأفاصيل للشكل المحصور بينC و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$.

✍ مسألة رقم 15:

A- نعتبر

$$\begin{cases} g(x)=1-x\ln x\ ;\ x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1) أ- تحقق أن الدالة g متصلة على اليمين في0 .

ب- أحسب نهاية g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ج- أدرس تغيرات الدالة g وضع جدول تغيراتها.

2) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]e^{-1},+\infty[$ بحيث $g(\alpha)=0$.

ب- إستنتج إشارة $g(x)$ على مجال تعريفها .

B - نعتبر:

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{\ln(1+\ln x)}{x}}\ ;\ x>e^{-1} \\ f(e^{-1})=0 \end{cases}$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في e^{-1} .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) بين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x>e^{-1}}}\dfrac{f(x)}{x-e^{-1}}=0$

يمكنك استعمال المتساوية:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x-e^{-1}}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(ex)}{ex-1}\right)+(e-1)\ln(ex-1)+\frac{1-ex}{x}.\ln(ex-1)+1$$

أ عط تأويلا هندسيا للنتيجة

4) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]e^{-1},+\infty[$.

أ- بين: $\forall x\in\left]e^{-1};+\infty\right[: f'(x)=\dfrac{g(1+\ln x)}{x^2(1+\ln x)}f(x)$.

ب- حدد بدلالة α حل المعادلة $f'(x)=0$ في $]e^{-1},+\infty[$.(العدد α المعرف في الجزء الأول)

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) أدرس وضع المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$.

6) أنشىء المنحنى (C) . نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=5\,cm$. $e^{-1}\approx 0{,}4$, $e^{\alpha-1}\approx 2{,}2$, $f(e^{\alpha-1})\approx 1{,}3$ ونقبل أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف I_1 و I_2 بحيث أفصوليهما x_1 و x_2 يحققان على التوالي $e^{-1}<x_1<1$ و $x_2>e^{\alpha-1}$ (حساب x_1 و x_2 غير مطلوب)

الأستاذ : علي الشريف
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية
cherifalix@yahoo.fr

مسألة رقم 16 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x)=x\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

1) a) أثبت أن f دالة زوجية .

b) برهن على أنه :

$$\forall x\in IR_+^*: e^{4x}+4x\,e^{2x}-1\rangle 0$$

c) اعط جدول تغيرات الدالة f .محددا نهايات في محدات مجموعة تعريفها .

2) ليكن C المنحنى الممثل للدالة في المستوى النسوب إلى م.م.م

a) ادرس الفروع اللآنهائية للمنحنى C محددا الوضع النسبي للمنحنىC و المقارب المائل .

b) ارسم C.

3) بين أنه $\forall x\in IR_+^*: \frac{x}{2e^{2x}}\le\frac{x}{e^{2x}+1}\le\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

4) لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) المتتاليات العددية المعرفة على

كما يلي : $u_n=\int_0^n\frac{x}{e^{2x}+1}dx$

و $v_n=\int_0^n\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$ و $w_n=\int_0^n\frac{x}{2e^{2x}}dx$

a) احسب w_n بدلالة n.

b) احسب v_n بدلالة n (يمكنك وضع $e^{x}=t$)

c) بين أنه : $\forall x\in IN: w_n\le u_n\le v_n\le\frac{\pi}{4}$

d) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و متقاربة .

e) لتكن a_n مساحة جزء المستوى المحصور بين المنحنى C و المستقيمات ذات المعادلات $y=x$ و $x=0$ و $x=n$ حيث $n\in IN$. بين أن $\frac{1}{4}\le\lim_{n\to+\infty}a_n\le\frac{\pi}{2}$

مسألة رقم 17:

نعتبر:

$$f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt[3]{x^3+1}\ , & x\ge-1\\ Arc\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{\pi}{3}-2\ , & x\langle-1\end{cases}$$

1) حدد D_f ثم احسب النهاية عند المحدات .

2) ادرس اتصال f و قابليتها للإشتقاق في $x_0=-1$.

3) أ- ادرس الفروع اللآنهائية ل C_f

ب-حدد وضعية C_f بالنسبة للمقارب المائل.

4) أ- بين أن f ق.ش على $D_f-\{-1\}$ و احسب $f'(x)$ على $x\in D_f-\{-1\}$.

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

ج- حدد وضعية C_f بالنسبة ل $D: y=x$ على $D_f\cap[-1,+\infty[$

5) أ- بين أن g قصور f على $I=[-1,+\infty[$ تقابل من I نحو J يجب تحديده.

ب- أنشىء C_f و $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم .

6) لتكن المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة ب $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ) ادرس رتابة $(U_n)_n$.

ب) بين أن $(U_n)_n$ متباعدة .

مسألة رقم 18:

A) نعتبر : $f(x)=\frac{2\sqrt[3]{1+x}}{1+\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

1) حدد مجموعة تعريف f و احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم حدد تغيرات f على $]-1,+\infty[$.

ب- بين أن: $\exists! k\in]0;1[\,/\,\forall x\in[0;+\infty[:|f'(x)|\le k$

3) نعتبر المتتالية (u_n): $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

أ- بين أن: $\forall n\in IN: 0\le U_n\le1$

ب- نضع : $V_n=U_{2n}$ و $W_n=U_{2n+1}$.

بملاحظة أن fof تزايدية على $]0,+\infty[$. بين أن (V_n) تزايدية و أن (W_n) تناقصيةوأن $V_n\le W_n$ لكل n من IN

ج- بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :

$$\forall n\in IN^*: 0\le W_n-V_n\le k^2(W_{n-1}-V_{n-1})$$

4) استنتج أن (V_n) و (W_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية.

B) نعتبر : $g(x)=Arc\sin f(x)$

1) نضع $\sqrt[3]{1+x}=\tan\frac{t}{2}$ و $x\in[-1,+\infty[$ و $t\in[0,\pi[$

بين أن $\begin{cases}g(x)=2Arc\tan\sqrt[3]{1+x}\ ;\ x\in[-1,0]\\ g(x)=\pi-2Arc\tan\sqrt[3]{1+x}\ ,\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق g على اليمين في -1.

ب- ادرس اشتقاق g يمين و يسار 0 ($X=\sqrt[3]{1+x}$)

3) حدد تغيرات g على $]-1,+\infty[$ (يمكن استعمالA) 2)

4) ارسم (C) منحنى الدالة g في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

مسألة رقم 19:

نعتبر: $f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt[3]{x^3+1}\ , & x\ge-1\\ Arc\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{\pi}{3}-2\ , & x\langle-1\end{cases}$

1) حدد D_f ثم احسب النهاية عند المحدات .

2) ادرس اتصال f و قابليتها للإشتقاق في $x_0=-1$.

3) أ- ادرس الفروع اللآنهائية ل C_f

ب-حدد وضعية C_f بالنسبة للمقارب المائل.

4) أ- أحسب $f'(x)$ على $x\in D_f-\{-1\}$.

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

الأستاذ : علي الشريف
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية
cherifalix@yahoo.fr

ج- حددوضع C_f بالنسبة ل $D : y = x$ على $]-1,+\infty[$

5) أ- بين أن g قصور f على $I=]-1,+\infty[$ تقابل من I نحو J يجب تحديده.

ب- أنشىء C_f و $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم .

6) نعتبر $(U_n)_n$ حيث : $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ) ادرس رتابة $(U_n)_n$ ثم بين أن $(U_n)_n$ متباعدة ..

مسألة رقم 20:

A- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $I=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بمايلي :

$$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

1) أ- بين أن: $\forall t\in I\ ,g'(t)=-\frac{t^3}{1+t}$.

ب- استنتج أن : $\forall t\in I\ ,|g'(t)|\le 2\,|t|^3$.

2) أثبت أن : $\forall x\in I\ ,|g(x)|\le 2\,x^4$ T.A.F.

B- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} & ,x\neq 0\\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) باستعمال نتائج الجزء A .بين أنf قابلة للاشتقاق في $x=0$ و حدد معادلة ديكارتية للماس (T) ل (C) في النقطة $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

2) نعتبر $h(x)=\frac{-x^2-2x}{1+x}+2\ln(1+x)$, $x\in]-1,+\infty[$.

أ- ادرس منحنى تغيرات f .

ب- احسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ على $]-1,+\infty[$.

3) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. واستنتج منحنى تغيرات f.

4) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

5) أنشىء (C) .

C-1) أ- أثبت أن : $\forall t\in[0,+\infty[,-t^2\le h'(t)\le 0$.

ب- لكل $x\ge 0$ استنتج باستعمال مكاملة تأطيرا ل $h(x)$ و بين أن: $|f'(x)|\le\frac{1}{3}$.

2) برهن على أن المعادلة : $f(x)=x$, $0\langle x$ تقبل حلا وحيدا a بحيث $a\langle 1$.

3) نضع :

$$\begin{cases} u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n),\forall n\in IN \end{cases}$$

أ- بين أن المتتالية (u_n) معرفة و أن $\forall n\in IN\ \ 0\le u_n\le 1$.

ب- بين أن : $\forall n\in IN,|u_{n+1}-a|\le\frac{1}{3}|u_n-a|$

ج- احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

د- حدد قيمة n بحيث يكون u_n قيمة مقربة للعدد a بالدقة 10^{-3}.

مسألة رقم 21:

1) f معرفة على $[0,1]$ ب:

$$\begin{cases} f(0)=0\ ,f(1)=1\\ f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x},0\langle x\langle 1 \end{cases}$$

أ- بين أن f دالة متصلة على $[0,1]$.

ب- استنتج وجود التكامل $I=\int_0^1 f(t)\,dt$.

2) نعتبر : $I(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$ و $J(x)=\int_x^1\frac{f(t)}{t}\,dt$ حيث $x\in]0,1[$.

و نعتبر الدالة :

$$F:]0,1]\to IR$$
$$x\to F(x)=J(x^2)-J(x)$$

أ- بين أن : F قابلة للاشتقاق على $]0,1]$

و أن: $F'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-2f(x^2)\right)$

ب- بين أن $\forall x\in]0,1]:\ f(x)-2(x^2)=-x\,f(x)$

ج- استنتج أن (1) $\forall x\in]0;1[:\ I(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}\,dt$

3) بين أن (2) $\forall x\in]0,1[:\ \int_{x^2}^{x}\frac{-1}{t\ln t}\,dt=\ln 2$

4) بين أن: $\forall x\in]0,1[,\forall t\in]0,x[:0\le\frac{-1}{\ln t}\le\frac{-1}{\ln x}$

و استنتج أن (3) $\forall x\in]0,1[:\ \left|\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right|\le\frac{-x}{\ln x}$

5) باستعمال النتائج(1) و(2) و(3) احسب $\lim_{x\to 0^+}I(x)$

6) أ- بين أن : $\forall x\in]0,1]:I-I(x)=\int_{x^2}^{x}f(t)\,dt$

ب- بين أن : $\forall x\in]0,1]\ \ 0\le I-I(x)\le x$.

ج- بين أن $I=\ln 2$.

الأستاذ : علي الشريف
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية
cherifalix@yahoo.fr

مسألة رقم 22:

نعتبر الدالة العددية (C) المعرفة على IR بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x^2+2x-2}{2x}\right)^{\frac{1}{e^x}} , x\langle 0 \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1} , x\rangle 0 \text{ و } x\neq 1 \\ f(0)=0 , f(1)=1 \end{cases}$$

1) بين أن f متصلة في 0 و متصلة في 1.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ مقارب م ل (C) بجوار $-\infty$

ج- حدد الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$.

3) ادرس الإشتقاق على اليمين و اليسار للدالة f في0 .

4) لتكن 'f الدالة المشتقة للدالة f بين أن :

$$\forall x\in\left]-\infty,0\right[: f'(x)=\frac{(x+1)(x^2-2x+2)e^{\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

$$\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[: f'(x)=\frac{-1+x-\ln x}{(x-1)^2}$$

5) بين أن : $f'(x)\rangle 0$ لكل x من $\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

6) ضع جدول تغيرات الدالة f .(نقبل أن $f'(1)=\dfrac{1}{2}$)

7) أنشىء المنحنى (C) .نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$.

نقبل أن للمنحنى (C) .نقطة إنعطاف أفصولها α يحقق $-1\langle\alpha\langle 0$.

مسألة رقم 23:

I) 1) أ حسب: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}$

و استنتج أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$

2) لكل عدد حقيقي x نضع : $I(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}.e^t\,dt$.

أ- بين أن : $\left[\ \forall x\geq 0\ ;\ 0\leq I(x)\leq e^x\dfrac{x^3}{6}\ \right]$

و $\left[\ \forall x\leq 0\ :\ |I(x)|\leq\dfrac{|x^3|}{6}\ \right]$ (دون حساب $I(x)$)

ب- بين أن : $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ (م.بالأج)

ج- باستعمال ما سبق بين أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

واستنتج أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^+

بمايلي : $f(x)=e^x\ln(1+x)-x$

أ درس تغيرات الدالة f واستنتج أن لكل x من IR^+

$f(x)\geq 0$ (نقبل أن $\forall x\ IR\ e^x\geq 1+x$)

II) نعتبر الدالة F المعرفة على IR^+

بمايلي :

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(x)=\displaystyle\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt\ ;\ x\rangle 0 \end{cases}$$

1) بين أن $\forall x\rangle 0 : \dfrac{e^x-1-x}{x}\leq F(x)\leq\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

2) بين أن F متصلة و قابلة للإشتقاق يمين 0 .

3) بين أن F قابلة للإشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$

وأن : $\forall x\rangle 0\ :\ F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$

4) أ حسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و ضع جدول التغيرات F .

5) ادرس الفرع اللآنهائي لمنحنى الدالة F بجوار $+\infty$.

مسألة رقم 24:

A) لتكن الدالة العدديةg المعرفة على IR بمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=x\ln|x|-(x-1)\ln|x-1|\ ;\ x\in IR^*-\{1\} \\ g(0)=g(1)=0 \end{cases}$$

1) بين أن: $(\Delta) : x=\dfrac{1}{2}$ محور تماثل بالنسبة ل (C) .

(لدراسة g نقتصر إذن على $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ $D_E=$)

2) أدرس اتصال و اشتقاق الدالة g في النقطة $x_0=1$.

3) a) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-1$.

b) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟

4) a) تحقق أن : $\forall x\in D_E-\{1\}\ :\ g'(x)=\ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)$

b) إشارة$g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g على IR.

5) a) حدد معادلة المماس (T) ل (C) في $x_1=2$.

b) أنشىء (T) و (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\ln 2\approx 0{,}7)$.

6) ماهي إشارة $g'(x)$ ؟

7) لتكنG الدالة العددية المعرفة على $\left]0,1\right[$ ب:

$$G(x) = -x + x^2\ln x - (x-1)^2\ln(1-x)$$

a) أحسب $G'(x)$ لكل x من $]0,1[$.

b)-استنتج حساب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحصور بين (C) و (Ox) والمستقيمين المحددين بالمعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1-\lambda$

(حيث $\frac{1}{2} \langle \lambda \langle 1$) .

- أحسب $\lim_{\lambda \to 1^-} A(\lambda)$.

B) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $R - \{-1,1\}$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x|} & \forall x \in IR^* - \{-1,1\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (Γ) منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب اتصال و اشتقاق f في الصفر.

2) أحسب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها.

3) a) بين أن :

$$\forall x \in IR^* - \{-1,1\}:\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$$

b) أدرس إشارة $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f .

4) a) حدد تقاطع المنحنى (Γ) مع الأفاصيل (ox) .

b) أحسب $f(-2)$ أنشئ (Γ) في المعلم السابق $\ln 3 \approx 1{,}1$

✍ مسألة رقم 25:

f معرفة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ب: $f(x) = |x| + \ln(\cos x)$

1) a) أختزل مجال دراسة f.

b) تحققأن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x} = 0$ ثم ادرس اشتقاقf في 0

c) ادرس تغيرات الدالة f و اعط جدول تغيراتها.

2)a) ادرس تقعر المنحنى (C) .

b) بين أنه يوجد α من $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

c) أنشىء (C) $\left((\pi = 3{,}14),(\ln 2 \approx 0{,}7)\right)$

3) F معرفة من IR نحو IR ب : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

و (Γ) منحناها في المعلم$(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) حدد مجموعة تعريف F وبين أن F دالة فردية.

b) بين أن F قابلة للاِش على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ احسب $F'(x)$.

c) ادرس تغيرات الدالة F على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

d) بين أن النقطة التي أفصولها $\frac{\pi}{4}$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (Γ) .ثم

استنتج تقعر (Γ) على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

4) نضع $G(x) = \int_0^x \ln(\cos t)\,dt$ حيث $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) بين أنه من أجل $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$G(x) = 2G\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 2G\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + x\ln 2$$

(يمكن اعتبار مشتقتي طرفي المتساوية)

b) نقبل أنG تقبل نهاية I يسار $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

تحقق أن : $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

c) استنتج نهاية F على اليسار في النقطة $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

✍ مسألة رقم 26:

F معرفة علىIR كمايلي : $F(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt}\sqrt{1+t^2}\,dt$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في م.م.م$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن الدالة F زوجية .

2) أ- بين أن :

$$\forall x \in IR^+ :\quad F(0).e^{-x} \le F(x) \le F(0).e^{x}$$

ب- استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0.

3) أ- بين أن : $F(x) \ge \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ $\quad \forall x \in IR^{+*}$

ب- استنتج طبيعة الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$.

4) أ- باستعمال المتغيير $u = t + \sqrt{1+t^2}$

حدد قيمة التكامل : $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

ب- استنتج قيمة$F(0)$.

5) أ- ليكن x_0 عنصرا من IR و t عنصرا من$[-1,1]$.

نضع $g(x) = \dfrac{e^{xt} - e^{x_0 t}}{x - x_0}$ لكل عدد x حيث : $x \ne x_0$

بين أن : $\forall \varepsilon \in IR^{+*},\quad \exists \eta \in IR^{+*}\quad :$

$$0 \langle |x - x_0| \langle \eta \Rightarrow \left|g(x) - te^{x_0 t}\right| \langle \frac{\varepsilon}{F(0)}$$

ب- استنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق في x_0

وأن : $F'(x_0) = \int_{-1}^{1} te^{x_0 t}\sqrt{1+t^2}\,dt$

ج- حدد العدد المشتق للدالة F في 0.

6) أ- بين أن:

$$\forall x \in IR \quad : F'(x) = \int_0^1 t\left(e^{xt} - e^{-xt}\right)\sqrt{1+t^2}\, dt$$

ب- استنتج أن الدالة F تزايدية على IR^+ .

7) أنشيء المنحنى (C) .

✍ مسألة رقم27:

لكل n من *IN نعتبر الدالة المعرفة علىIR كمايلي:

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\left(e^t + e^{-t}\right)^n}$$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن الدالة f_n فردية.

ب- بين أن f_n قابلة للاِش علىIR وحدد دالتها المشتقة

ج- بين أن f_n تزايدية قطعا على IR .

د- بين أن O نقطة انعطاف بالنسبة للمنحنى (C_n) .

ه- حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

2) أ- حدد الدالتين f_1 و f_2 .

ب- بين أن نهايتي الدالتين f_1 و f_2 عند $+\infty$ هما $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{1}{4}$.

ج- أنشيء المنحنيين (C_1) و (C_2) .

3) نعتبر أن : $n \geq 3$.

أ- تحقق أن :

$$\forall t \in IR : \frac{4}{\left(e^t + e^{-t}\right)^n} = \frac{1}{\left(e^t + e^{-t}\right)} - \frac{\left(e^t - e^{-t}\right)^2}{\left(e^t + e^{-t}\right)^n}$$

ب- بين أن : $\forall t \in IR :$

$$4(n-1) f_n(x) = (n-2) f_{n-2}(x) + \frac{e^x - e^{-x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^{n-1}}$$

ج- نفترض أن f_n تقبل نهاية λ_n عنذ $+\infty$.

حدد علاقة بين λ_n و λ_{n-2} .

واستنتج أن :

$$\forall p \in IN^*, \lambda_{2P+1} = \frac{(2p)!}{4^{2p} \times (p!)^2} \times \frac{\pi}{4}$$

✍ مسألة رقم28:

g معرفة على $]0,+\infty[$ ب : $g(x) = 2x - 2 + \ln x$

أ- ادرس منحى تغير الدالة g .

ب- احسب $g(1)$ ثم ادرس إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

2) f معرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي : $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$

و (C) تمثيلها المبياني في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

ب- ادرس الفرع اللآنهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ج-أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ثم اعط جدول تغيرات f .

د- انشيء (C) .

3) أ- أ حسب : $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ (م بالأجزاء)

ب- أ حسب $J = \int_1^2 f(x) dx$.

4) نضع : $I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

أ- بين أن :

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

ب- آ ستنتج أن : $I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

ج- أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

✍ مسألة رقم 29:

لتكن f دالة عددية معرفة و قابلة للإشتقاق على IR و تحقق ما يلي :

$$f(0) = f'(0) = 1$$

و

$$(\forall x \in IR):\ f'(x) - f(x) = 2\int_0^x f(t)\, dt$$

ليكن (C) المنحنى الممثل f بالنسبة لمعلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)أ- بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على IR.

ب- بين أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية :

$$(E): y'' - y' - 2y = 0$$

2) أ- حل المعادلة التفاضلية(E) .

ب- استنتج أن: $(\forall x \in IR): f(x) = \frac{1}{3}\left(2e^{2x} + e^{-x}\right)$

3) أ- ادرس الفروع اللآنهائية للمنحنى (C) .

ب- ادرس تغيرات الدالة f على IR .

ج- أنشيء المنحنى (C) .

نأخذ : $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 3cm$

$\ln 2 = 0,7$ و $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-1} = 0,8$

4) أحسب بالوحدة"cm^2" مساحة الحيز المسطح المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي :

"y = 0"و "x = 0" و "x = 1" .

5) لكل عدد صحيح طبيعي n نضع : $u_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt} dt$

أ- بين أن : $(\forall n \in IN):\ 0 \leq u_n \leq f(1)\int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$

ب- استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4e^{3^{\frac{k}{n}}}-1}{e^{3^{\frac{k}{n}}}+1}$$

أ- بين أن : $(\forall n \in IN^*):\ w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f'\left(\frac{k}{n}\right)}{f\left(\frac{k}{n}\right)}$

ب- استنتج أن المتتالية $(W_n)_{n\ge1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها

✍ مسألة رقم 30:

I) f معرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$

1) a) أحسب نهاية f عند $+\infty$.

b) ادرس تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$.

c) حدد دالة أصلية للدالة $x \to x\,e^{-x}$.

d) باستعمال نتائج السؤال b بين مايلي :

$$(1)\qquad \forall x \in [0,+\infty[\ :\ 0 \le xe^{-x} \le 1$$

$$(2)\qquad \forall x \in]0,+\infty[\ :\ f(2x) - f(x) \langle 0$$

2) a) تحقق أن :

$$1 - u \le \frac{1}{1+u} \le 1 - \frac{1}{2}u \quad \text{لكل } u \text{ من } [0,1]$$

b) استنتج أن :

$$\forall t \in IR^+ : 1 - te^{-t} \le \frac{1}{1+te^{-t}} \le 1 - \frac{1}{2}te^{-t}$$

II) F معرفة على $[0,+\infty[$ ب: $F(x) = \int_x^{2x}\frac{1}{1+te^{-t}}\,dt$

1)a) باستعمال النتيجة (3) بين أن :

$$\forall x \in [0,+\infty[\ :$$

$$x + f(2x) - f(x) \le F(x) \le x + \frac{1}{2}\left(f(2x) - f(x)\right)$$

b) استنتج أن:

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(F(x) - x) = 0$.

c) بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[\ :\ F(x) \langle x$

2) لتكن φ دالة أصلية للدالة $t \to \frac{1}{1+te^{-t}}$ على $[0,+\infty[$

بملاحظة أن: $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ على $[0,+\infty[$

a) بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$.

b) بين أن :

$$\forall x \in IR^+\ :\ F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + xe^{-x})}$$

c) استنتج أن : $\forall x \in IR^+ : F'(x) \rangle 0$

3) ليكن (C) منحنى الممثل للدالة F في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) أنشىء (C).

b) حدد دالة أصلية للدالة $x \to f(2x) - f(x)$.

c) ليكن A مساحة الحيز المستوي المحصور ب (C) و المستقيمات المحددة بالمعادلات $y = 0$ و $x = 0$ و $x = 1$ باستعمال العلاقة(4) حدد تأطيرا للعدد A.

✍ مسألة رقم 31:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = 1 - x\ln x\ ;\ x \rangle 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1) أ- تحقق أن الدالة g متصلة على اليمين في 0.

ب- أحسب نهاية g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ج- ادرس تغيرات الدالة g وضع جدول تغيراتها .

2) أ- بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]e^{-1},+\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على مجال تعريفها .

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]e^{-1},+\infty[$بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+\ln x)}{x}\right)\ ;\ x \rangle e^{-1} \\ f(e^{-1}) = 0 \end{cases}$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في $\frac{1}{e}$.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$.

3) بين أن $\lim_{\substack{x\to e^{-1}\\ x\rangle e^{-1}}}\frac{f(x)}{x - e^{-1}} = 0$ يمكنك استعمال المتساوية

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x - e^{-1}}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(ex)}{ex - 1}\right) + \frac{1 - x}{x}\ln(ex - 1) + 1$$

اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

4) لتكن 'f الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]e^{-1},+\infty[$.

أ- بين أن لكل x من $]e^{-1},+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(1+\ln x)}{x^2(1+\ln x)}\,f(x)$$

ب- حدد بدلالة α حل المعادلة $f'(x) = 0$ في $]e^{-1},+\infty[$ (α هو العدد المعرف في الجزء الأول).

ج- ضع جدول التغيرات الدالة f .

5) ادرس وضع المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$.

6) أنشىء المنحنى (C) .نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5cm$ و $e^{-1} \approx 0,4$ و $e^{\alpha-1} \approx 2,2$ و $f(e^{\alpha-1}) \approx 1,3$.

و نقبل أن المنحنى يقبل نقطتي انعطاف I_1 و I_2 بحيث أفصوليهما x_1 و x_2 يحققان على التوالي : $e^{-1} \langle x_1 \langle 1$ و $x_2 \rangle e^{\alpha-1}$

مسألة رقم 32:

نعتبر $f_m(x)=\ln(e^x+m)$ حيث $m\in IR^*$

A) 1) أ- حدد D_{f_m} حسب قيم m .

ب- أدرس تغيرات f_m حسب قيم m.

2) أ- بين أن : $f_m(x)=x+\ln(1+me^{-x})$.

ب- استنتج أن C_m يقبل مقارب مائل (Δ) .

ج- أدرس حسب قيم m الوضع النسبي ل C_m و (Δ) .

3) أ- بين أ، لكل m من IR^* , f_m تقابل من D_{f_m} نحو $f_m(D_{f_m})$.

ب- بين أن : $f_m^{-1}=f_{-m}$ $(m\rangle 0)$

ج- استنتج أنه يمكن إنشاء C_{-m} إنطلاقا من C_m $(m\rangle 0)$.

4) أ- بين أن :

$$\forall m\rangle 0;\forall x\in IR: f_m(x+\ln(m))=f_1(x)+\ln(m)$$

ب- بين أن C_m يستنتج إنطلاقا من C_1 بإزاحة يتم تحديدها .

5) أنشيء في المعلم: C_1 و C_2 و C_{-2} .

B) نعتبر $(U_n)_{n\in IN^*}$

$$\begin{cases} U_0=1 \\ \int_{U_{n-1}}^{U_n}(f_1(x)-x)\,dx=\frac{1}{(n+1)!} \end{cases} \quad , n\in IN^*$$

1) بين أن : $(U_n)_{n\in IN^*}$ تزايدية .

2) أ- بين أن : $e^{-U_{n-1}}e^{-U_n}\langle \frac{1}{(n+1)!}$.

ب- بين أن (U_n) متقاربة .

ملحوظة : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{1}{p!}=e$.

مسألة رقم33:

I- نعتبر من أجل كل x من IR_+^* و n من IN^* :

$$F_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1(1-t)^n e^{tx}$$

1) أ- بين أن : $F_{n+1}(x)=F_n(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

ب- أحسب $F_1(x)$.

2) بين أن بالترجع أن :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+........+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1(1-t).e^{tx}dt$$

3) بين أن : $\lim_{x\to0}x\int_0^1(1-t)^2e^{tx}dt=0$

(استعمل إكبار مناسب)

II- نعتبر : $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) أ- بين أن f متصلة في 0.

ب- بين باستعمال نتائج I أن f قابلة للإشتقاق عند0 .

2) أ- بين أن : $\forall x\neq 0\ ;\ f'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}$

بحيث : $\varphi(x)=1+(x-1)e^x$

ب- أدرس تغيرات الدالة φ .ثم أعط إشارة $\varphi(x)$ على IR^* .

ج- أدرس تغيرات الدالة f .

3) أ- أكتب معادلة المماس (Δ) عند 0.

ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ) .

ج- أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f) .

4) أرسم (C_f) (مع إنشاء (Δ)).

III- نعتبر : $g(x)=\text{Arcsin}(x\,f(x))$.

1) أ- أدرس تغيرات الدالة g (مجموعة التعريف – النهايات – الإشتقاق).

ب- أرسم (C_g).

(مع تحديد المماسات عند $x=\ln(2)$ و $x=0$.)

2) أ- بين أن : g تقبل دالة عكسية g^{-1} يتم تحديدها .

ب- أرسم $C_{g^{-1}}$.

---

cherifalix@yahoo.fr

مسألة رقم34:

ليكن n من IN^* نعتبر f_n المعرفة على $[0,1]$ بمايلي :

$$\begin{cases} \forall t \in]0,1]: f_n(t) = \dfrac{1-(1-t)^n}{t} \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

I-1) بين أن f_n متصلة على $[0,1]$.

2) بين أن f_n دالة حدودية درجتها n-1.

II- n من IN^* نضع :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{و} \quad I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

1) بين أن : $\forall k \in IN^* : \ I_n = \sum_{p=1}^{n} C_n^P \dfrac{(-1)^{p-1}}{p}$.

2) أ- بين أن : $\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \dfrac{1}{k} \quad : \quad \forall k \in IN^*$

ب- بين أن : $I_n = S_n : \forall n \in IN^*$.

3) أ- بين أن $\forall p \in IN^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px)\,dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$$

ب- بين أن $\forall n \in IN^*$:

$$\sum_{p=1}^{n} C_n^P \sin(2px) = 2^n \sin(nx)\cos^n x$$

ج- استنتج أن $\forall n \in IN^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx)\cos^n x\,dx = \frac{\pi}{2^{n+2}}.S_n$$

III- لتكن φ الدالة المعرفة بمايلي : لكل $x \in [0;1[$.

$$\forall t \in [0;x] : \quad \varphi(t) = \frac{x-t}{1-t}$$

1) بين أن : $0 \le \varphi(t) \le x \quad \forall t \in [0;x]$.

2) تحقق أن $\forall t \in [0;x]$: $\dfrac{\varphi(t)}{1-t} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} + \dfrac{1}{1-t}$

3) – بين بالترجح أن $\forall x \in [0,1[$ و $\forall n \in IN^*$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(\varphi(t))^n}{1-t}\,dt$$

4) –باستعمال III- بين أن : $\forall n \in IN^*, \forall x \in [0,1[$

$$0 \le \int_0^x \frac{(\varphi(t))^n}{1-t}\,dt \le -x^n \ln(1-x)$$

5) أ– بين أن أن : $\forall n \in IN^*, \forall x \in [0,1[$

$$(1-x)\sum_{k=1}^{n} S_k x^k = -\int_0^x \frac{(\varphi(t))}{1-t}\,dt - S_n x^{n+1} - \ln(1-x)$$

ب- ليكن من $[0,1[$

بين أن : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} S_k x^k = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$

ليكن x من IN^* . نضع :

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin px \cos^p x\,dx \right)$$

بين أن $(U_n)_{n\in IN^*}$ متتالية متقاربة وحدد نهايتها .

مسألة رقم35:

I) لتكن f دالة متصلة علىIR نضع :

$$\begin{cases} F(x) = x.\int_0^1 f(t.x).dt \ ; x \ne 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1) بين أن : $F(u) = \int_0^x f(u).du$

2) آستنتج أن F قابلة للإشتقاق على IR.

II) نعتبر الدالة :

$$f_\lambda(x) = \text{Arcsin}(\sqrt{\lambda.x}) \ ; \ \lambda \in IR^*$$

1) حدد حسب قيم λ مجموعة التعريف D_{f_λ} .

2) بين كيف يمكن إنشاء $C_{-\lambda}$ آنطلاقا من C_λ .

3) نفترض أن $\lambda \rangle 0$ ادرس تغيرات f_λ

ثم ارسم f_1 و f_{-1} .

4) بين أن f_λ تقبل دالة عكسية f_λ^{-1} يتم تحديدها .

5) لتكن g دالة قابلة للإشتقاق و تقبل دالة عكسية g^{-1} على $[a;b]$ بين أن :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(x).dx = b.g(b) - ag(a) - \int_a^b g(t).dt$$

(يمكن وضع $t = g(x)$)

6) حدد مساحة الحيز A من المستوى المحدود ب C_f و محور الأفاصيل x'ox و المستقيمين الذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$

III) لتكن :

$$u_n = \frac{1}{n}.\int_0^1 Ar\sin\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right).dx \ ; \ n \ge 1$$

أ- بين أن : (u_n) تناقصية ثم آستنتج أنها متقاربة .

ب - حدد : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

http://arabmaths.ift.fr

cherifalix@yahoo.fr